¿LA RUEDA DE LA BICI, RUEDA O GIRA?

Cuando montamos en coche, en moto, o en bicicleta, no nos es necesario para conducir el vehículo saber nada de los fenómenos físicos que están aconteciendo en ese momento. Yo ya a mi edad no monto en bici, no me siento en el incómodo sillín, pero lo que si puedo hacer es estudiar la física de la bicicleta, sentado en una cómoda silla.

Voy a dividir este escrito en dos partes, en la primera contaré algunas cosas que creo que son nuevas sobre la bici sin fórmulas físicas ni ecuaciones, y en la segunda, por si alguien lo quiere ver, demostraré apoyándome en la física lo apuntado en la primera parte.

PRIMERA PARTE.

Durante los últimos días del pasado mes de junio de 2021 y parte del mes de julio se está corriendo el tour de Francia.

Desde que he comenzado a escribir este artículo, veo todos los días en la televisión el desarrollo de la etapa y me fijo para ver cómo la bici obedece a las leyes de la física, también cuando veo circular bicicletas por la calle no puedo dejar de fijarme en sus movimientos. Un nuevo entretenimiento.

Cuando un ciclista se desplaza a una velocidad de 70 km/h., el punto donde está la válvula por donde se infla la rueda, en el momento en que está en la parte superior de la rueda, tiene una velocidad de 140 km/h. el doble de la velocidad de la bici. Cuando la válvula está en el punto de contacto de la rueda con el suelo, su velocidad es nula.

Ahora al ver circular una bici me fijo en estas cosas, que como he dicho las demostraremos en la segunda parte.

Veo que la rueda gira respecto del cuadro, pero que rueda respecto del suelo. No es lo mismo girar que rodar.

Al ser la rueda elástica, debido al peso de la bici y el ciclista, se deforma en la zona de contacto con el suelo, el contacto no se realiza en un solo punto. Cuanto más inflada está la rueda se deforma menos, la superficie de contacto entre la rueda y suelo es menor. Se puede comprobar esta deformación elástica de la rueda sentándose una persona en el sillín y otra persona, con una hoja plastificada por ejemplo, tratar de pasar la hoja entre la rueda y el suelo. Haciéndolo por la izquierda y por la derecha veremos que la superficie de contacto no es un punto, sino un pequeño segmento. Esto es debido a que rueda al ser elástica es deformada por la reacción del suelo al peso transmitido por la rueda. Ver la figura.

Al ser mayor la superficie de rozamiento cuando la rueda está poco inflada, hay que esforzarse más para hacerla avanzar.

SEGUNDA PARTE.

Hay que recordar que la velocidad absoluta. (respecto del suelo VA), es igual a la velocidad relativa Vr, (el giro de la rueda respecto de la bici) más la de arrastre Va que es de 70 Km/h., (la velocidad de la bici respecto del suelo). Figura 1.

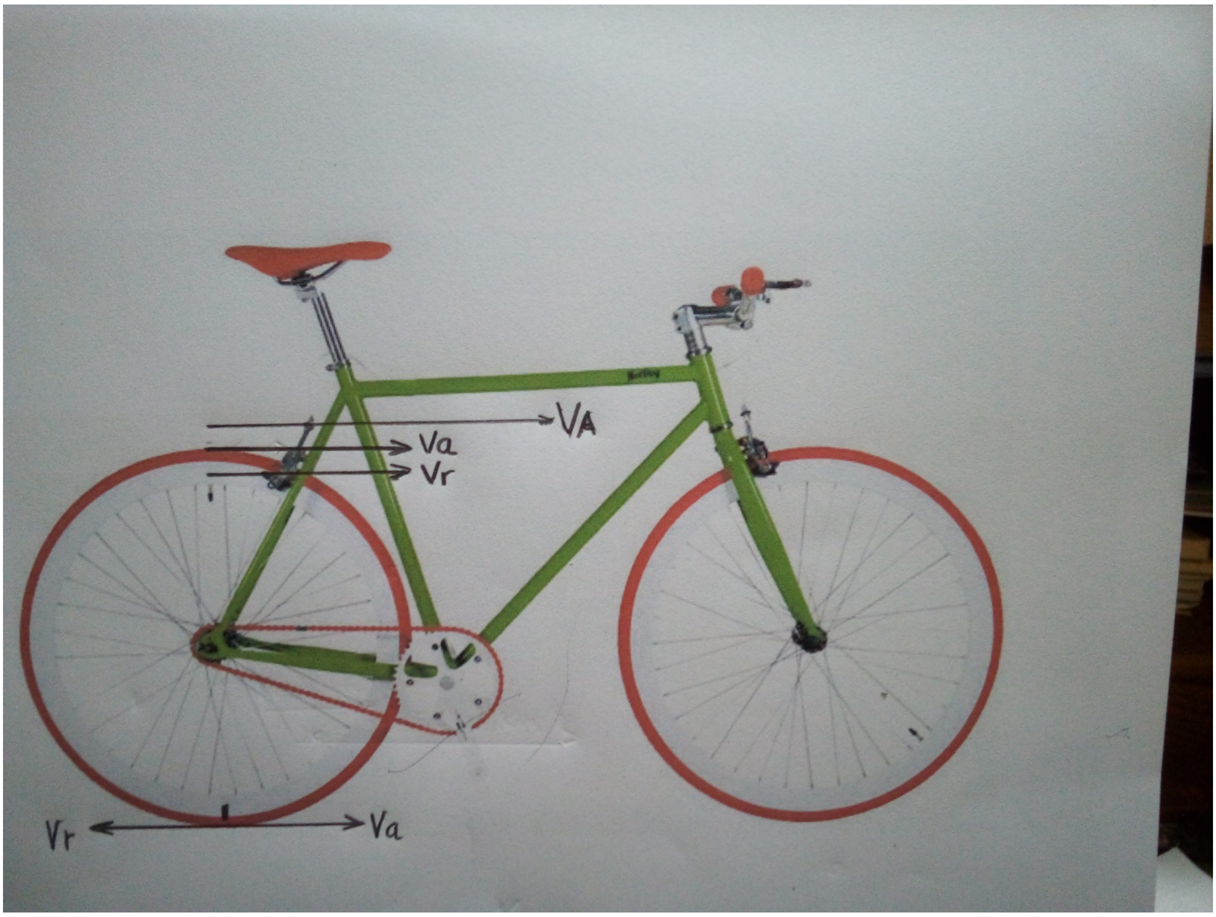


Figura 1.-

Como no hay deslizamiento, sino solamente rodadura, la válvula respecto de la bici, (velocidad relativa) tiene una velocidad tangencial de Vr=70 km/h. que en el punto de arriba es horizontal y en el sentido del movimiento. Por lo tanto, VA=Vr+Va=140 km/h.

En el punto de contacto de la rueda con el suelo, Va=Vr=70 km/h. son iguales en módulo, pero de sentidos contrarios, VA=70-70=0, la velocidad absoluta es pues nula. En ese punto de contacto, la rueda no se mueve respecto del suelo, gira alrededor de ese punto. Esto es rodadura pura, sin deslizamiento ni rozamiento. Respecto del suelo la válvula (y cualquier punto exterior de la rueda), describe una curva conocida por el nombre de cicloide común. Ver figura 2.

Si somos capaces de seguir con la vista el movimiento de la válvula, comprobaremos que en efecto, su trayectoria es la cicloide.

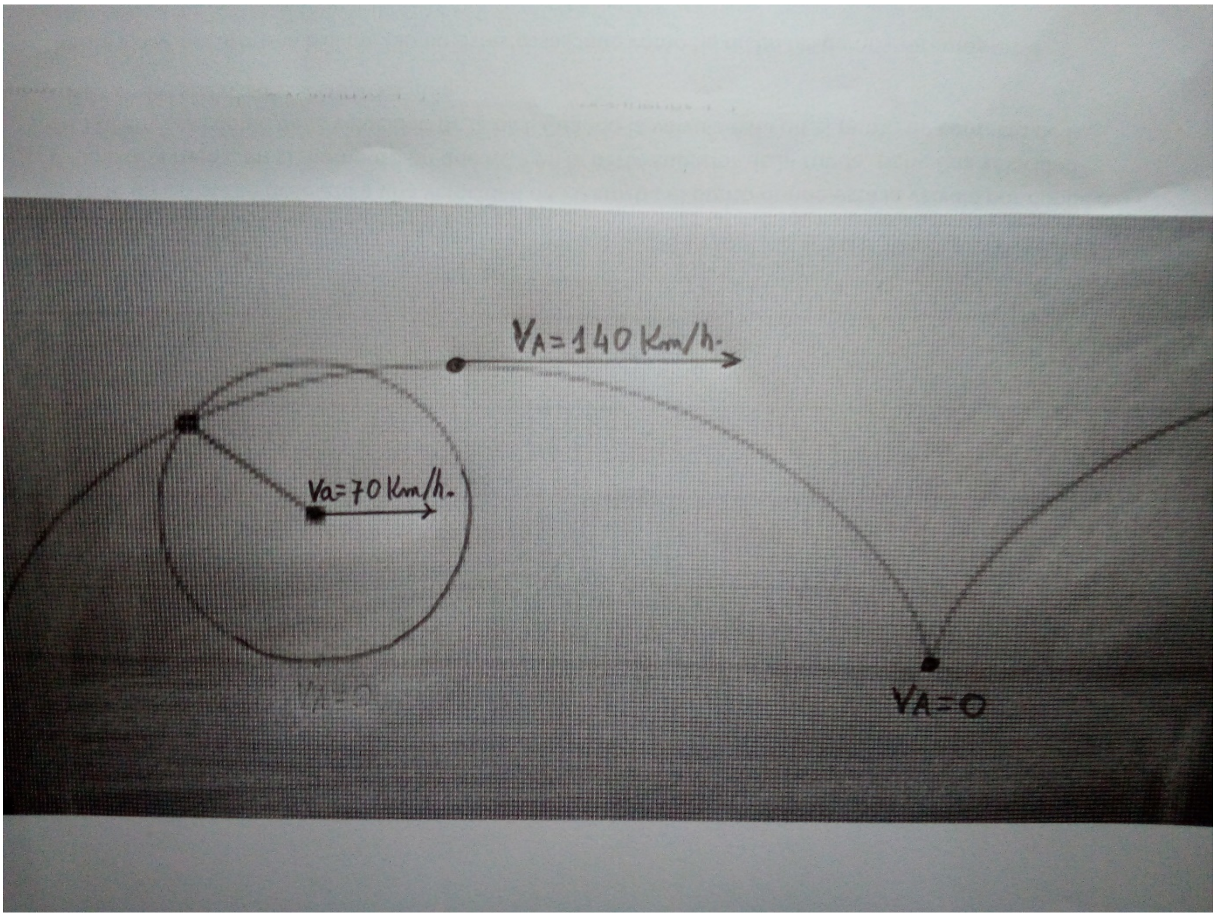


Figura 2.-

La rueda gira respecto del cuadro, pero rueda respecto del suelo. Realiza estos dos tipos de movimiento dependiendo del sistema de referencia que tomemos.

Sabemos que la velocidad tangencial es igual a la velocidad angular por el radio. Si R es el radio de la rueda y W su velocidad angular, la velocidad tangencial que en este caso es la relativa respecto del cuadro de la bici es Vr=W·R, como en el punto superior de la rueda VA=2·Vr, VA=2·R·W, pero 2·R=D es el diámetro, es decir VA=W·D. La velocidad absoluta de la válvula en la zona superior de la rueda es la que tendría si la rueda girase con una velocidad angular W, alrededor del punto de contacto con el suelo, a una distancia D de la válvula. Es decir, en cada instante, la parte superior de la rueda está girando respecto del punto de contacto con el suelo con una velocidad angular W (la velocidad angular de la rueda respecto del cuadro de la bici). Esto es lo que hace la rueda, rodar. Si levantásemos la rueda delantera tirando hacia arriba del manillar, e impulsásemos la rueda con la mano, esta giraría alrededor de su eje. Esto sí es girar. Si a continuación bajamos la rueda otra vez mientras gira, comenzará a tratar de rodar debido al rozamiento entre la rueda y el suelo.

Vamos a ver que este giro de la parte superior de la rueda respecto del punto de contacto de la rueda con el suelo, no solo ocurre con el punto superior de la rueda. La velocidad absoluta de todos los puntos de la rueda, (respecto del suelo), es la que tendrían si la rueda girase en ese momento respecto al punto de contacto con el suelo con una velocidad angular W, que es la velocidad de giro de la rueda respecto del cuadro de la bici.

Fijémonos en la figura 3.

Tomemos un punto cualquiera P del perímetro exterior de la rueda. La velocidad absoluta de ese punto es la suma vectorial de Va y Vr. Los módulos de estos dos vectores son iguales, Va es horizontal y Vr es perpendicular al radio. Los ángulos DPF y OPA son por lo tanto rectos. DPF=APF+DPA=90º, OPA=OPD+DPA=90º, dividiendo por dos estas igualdades tenemos APF/2+DPA/2=45º y OPD/2+DPA/2=45º, sumando ahora estas igualdades APF/2+OPD/2+DPA=90º Pero APF/2=APC y OPD/2=BPD, es decir APC+BPD+DPA=90º. Por lo tanto, la velocidad absoluta VA es perpendicular a BP. Es fácil ver que APF=OPD=(a)

BP=2·R·cosa, y VA=2·Vr·cosa=2·W·R·cosa es decir VA=BP·W.

Por lo tanto P está girando alrededor de B con velocidad W, Que es lo que queríamos demostrar.

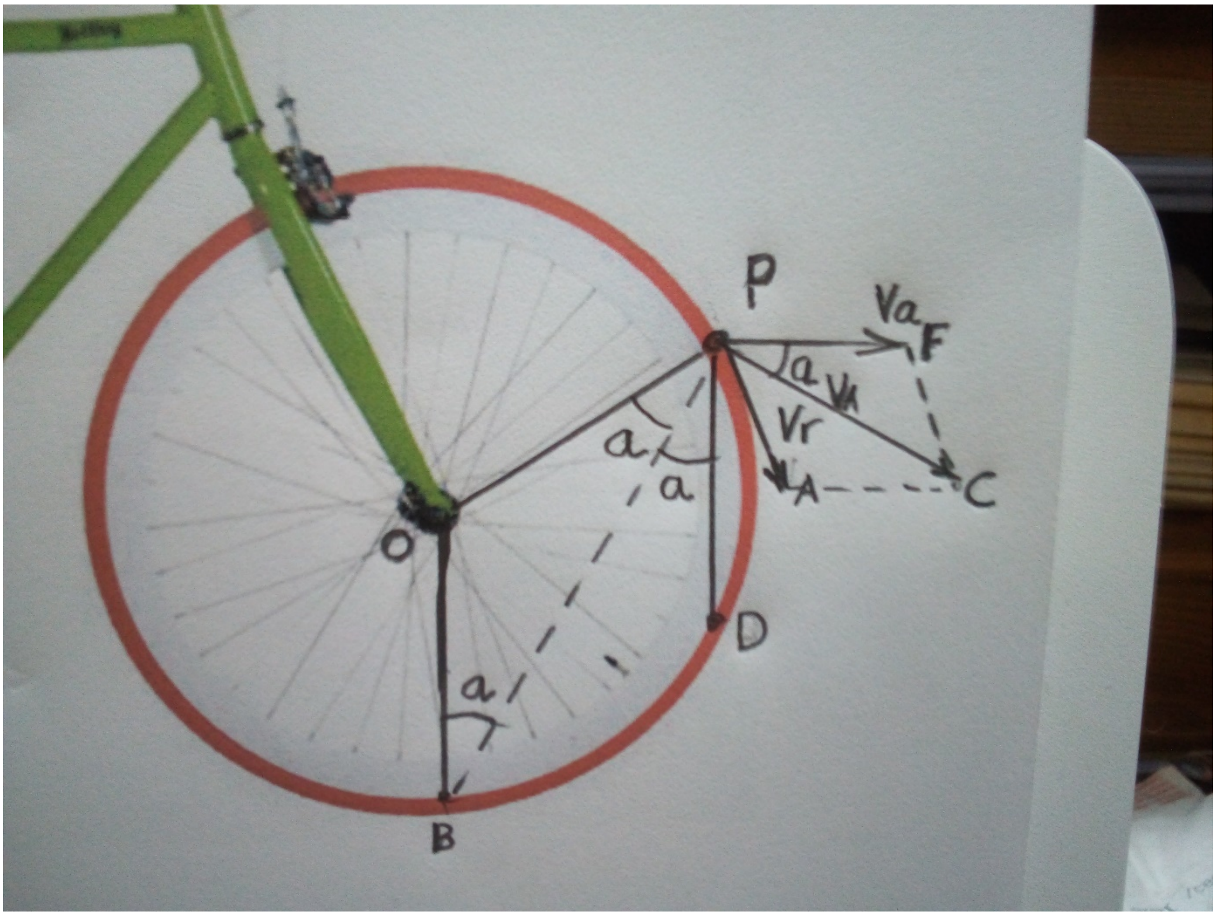


Figura 3.-

El movimiento absoluto de la rueda es un giro instantáneo alrededor del punto de contacto con el suelo, y con velocidad angular la de la rueda alrededor de su eje. Es decir, la rueda sí rueda, que no es otra cosa que girar respecto de su punto de contacto con el suelo, (punto que está fijo respecto del cuadro de la bici), pero no respecto de su eje.

Podemos demostrar de otra forma lo dicho anteriormente utilizando el concepto de energía cinética. La energía cinética total ET de la rueda de la bici se compone de dos sumandos, la energía cinética de traslación Et y la de rotación Er. Los valores de estas dos energías son los siguientes, Et=m·$V^2$/2.

Siendo V la velocidad de traslación. $Er=I\cdot W^2/2$. Siendo I el momento de inercia de la rueda respecto de su eje y W la velocidad angular de la rueda respecto del cuadro. Es decir, $ET=m\cdot V^2/2+I\cdot W^2/2$.

Al tener la rueda casi toda la masa en la circunferencia exterior, su momento de inercia es $I=m\cdot R^2$, y como $V=W\cdot R$, $Et=m\cdot W^2\cdot R^2/2+m\cdot W^2\cdot R^2/2=m\cdot W^2\cdot R^2=m\cdot V^2$ (3)

Si calculamos la energía cinética de la rueda respecto del punto de contacto con el suelo como una rotación alrededor de este punto, su energía total es la de una rotación respecto de ese punto, la velocidad angular es W, pero su momento de inercia no es el que se obtiene respecto del eje, sino respecto del punto de contacto con el suelo, Hay que aplicar el teorema de Steiner y al momento de inercia respecto del eje hay que sumarle $m\cdot R^2$, El momento de inercia respecto de ese punto es pues $Is=m\cdot R^2+m\cdot R^2=2\cdot m\cdot R^2$, el doble que respecto de su eje. La energía cinética de rotación respecto de ese punto es $Ec=Is\cdot W^2/2=2\cdot m\cdot R^2\cdot W^2/2$, pero $R\cdot W=V$. Luego $Ec=m\cdot V^2$, igual que (3).

De esta otra forma también se demuestra que el movimiento de la rueda es el de rotación respecto al punto de contacto con el suelo. La rueda sí rueda, pero respecto a ese punto de contacto, no respecto a su eje.

Esto de haber demostrado que el movimiento de los puntos del perímetro de la rueda respecto de suelo, (movimiento absoluto), es un giro alrededor del punto de contacto con el suelo, y que el momento de inercia a tener en cuenta es también el relativo a este punto, nos va a servir para hablar del equilibrio de la bici y del par giroscópico.

Cuando lanzamos una moneda a rodar dándole un impulso, esta como sabemos sigue rodando en línea recta durante un tiempo antes de caerse. Esto es debido a que cuando la moneda se inclina algo, su trayectoria empieza a no ser recta y recorre una curva. Entonces aparece lo que llamamos "par giroscópico" que impide que se incline del todo y mantiene la moneda sin caerse durante unos instantes. Este par giroscópico se demuestra que es proporcional al momento de inercia I y a la velocidad de rotación. Cuanto mayor sean el momento de inercia y la rotación, más fácil es mantener el equilibrio sin caer. Tanto en la bici como en la moneda el momento de vuelco es proporcional al producto del peso por la altura del centro de gravedad (h), $M_v$ proporcional a $mg\cdot h$. El par giroscópico que se opone a este momento de vuelco $M_g$ es proporcional al momento de inercia y a la velocidad angular como hemos dicho.

Sea una bicicleta que avanza a 30 km/h=30.000 m/3.600 s=8.33 m/s. La longitud de la circunferencia de radio 40 cm. Es 2·3,14·0,4=2,51 m. es decir que la rueda gira a razón de 8,33/2,51=3,32 vueltas por segundo. Si lanzamos una moneda de 1 euro a rodar por la mesa, puede desplazarse con una velocidad de un metro en cuatro segundos V=0,25 m/s=25 cm/s. Como tiene 1,12 cm. de radio, su circunferencia mide 2·3,14·1,12=7 cm. y gira 25/7=3,57 vueltas cada segundo, muy similar a la rueda. Por lo tanto para comparar los pares giroscópicos de rueda y moneda no es necesario tener en cuenta las velocidades angulares, es suficiente comparar los momentos de inercia.

En la bicicleta m es la suma de las masas del ciclista más la del cuadro más la de las dos ruedas, por ejemplo, $m_b=70+10+2x2=84$ kg. El momento de inercia de las dos ruedas respecto del punto de contacto con el suelo es $I_b=2\cdot 2\cdot m\cdot R^2$, que para un radio de 40 cm. $I_b=4\cdot 2\cdot 0{,}16=1{,}28$.

Suponiendo que en la bici h=1 m. el momento de vuelco es proporcional a 84·9,82·1=824,88, en este caso la relación entre la recuperación y en vuelco es $C_r=1{,}28/824{,}88=0{,}00155$.

En la moneda de 1 euro $m_m=7$ gr=0,007 kg., R=1,125 cm=0,01125 m. Y el momento de inercia de una moneda respecto del punto de rodadura es $I_m=(3/2)\cdot m_b\cdot R^2=(3/2)\cdot 0{,}007\cdot 0{,}01125^2=0{,}0000013289$

El momento de vuelco es proporcional a 0,007·9,82·0,001125=0,000077

En este caso de la moneda, la relación entre recuperación y vuelco es $C_r$=0,132897/7,7=0,01725

Que es algo más de 10 veces mayor que el obtenido para la bicicleta.

En líneas generales es diez veces más difícil mantener el equilibrio en la bici que en la moneda. Ocurren otras cosas, como que la moneda es rígida y la bici tiene un manillar que puede girar, pero no vamos a continuar con este tema del equilibrio. En la mayoría de los escritos sobre el equilibrio de la bici se dice que el par giroscópico ayuda algo a mantener el equilibrio, pero que su importancia es pequeña, pues al ser la masa de la rueda pequeña con relación a la masa total de la bici y ciclista, el par giroscópico es relativamente pequeño, por ser pequeño su momento de inercia.

Hay que decir que el par giroscópico que actúa sobre el total de una bicicleta es cuatro veces el que actúa sobre una sola rueda girando sobre su eje. Son dos pares, uno por cada rueda, y el momento de inercia rodando es en doble que girando. El par giroscópico que actúa sobre una sola rueda girando (la cuarta parte del que actúa sobre la bicicleta), lo podemos sentir soltando una rueda, haciéndola girar en nuestras manos sujetándola por el eje y moviendo un poco intentando cambiar el plano en el que gira la rueda. Es una sensación muy curiosa.

Antton del Campo

Ingeniero Industrial.