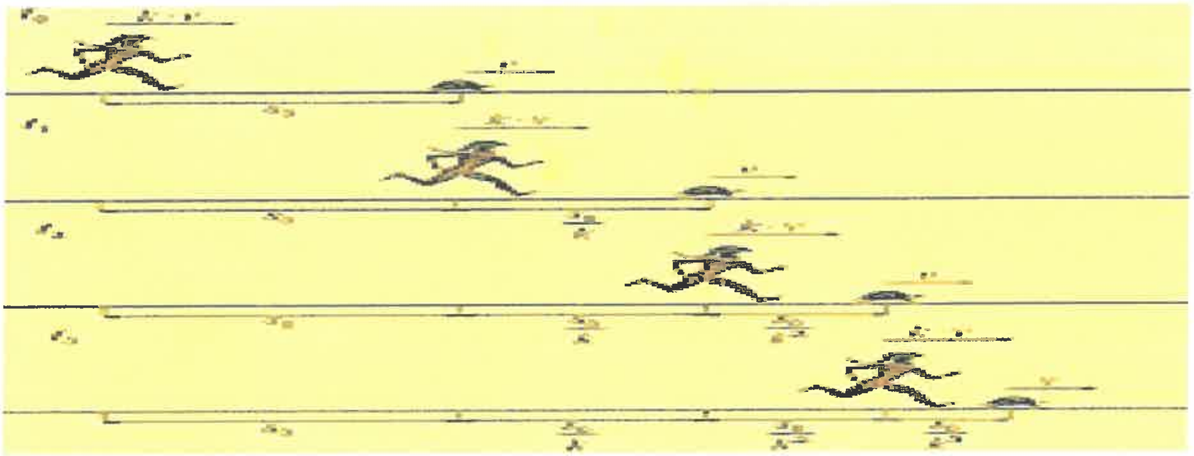
¿INFINITO?



Cuando utilizamos la palabra infinito, muchas veces las cosas no quedan del todo claras. En nuestra vida habitual lo que utilizamos son cantidades finitas, y es lógico que cuando nos surge algo en lo que tenemos que utilizar el término infinito para designar algo, nos liemos un poco o bastante.

Hay muchos ejemplos en los que nos aparece esta palabra.

Si nos preguntamos cuantos puntos hay en un segmento, lo más normal es que digamos que infinitos.

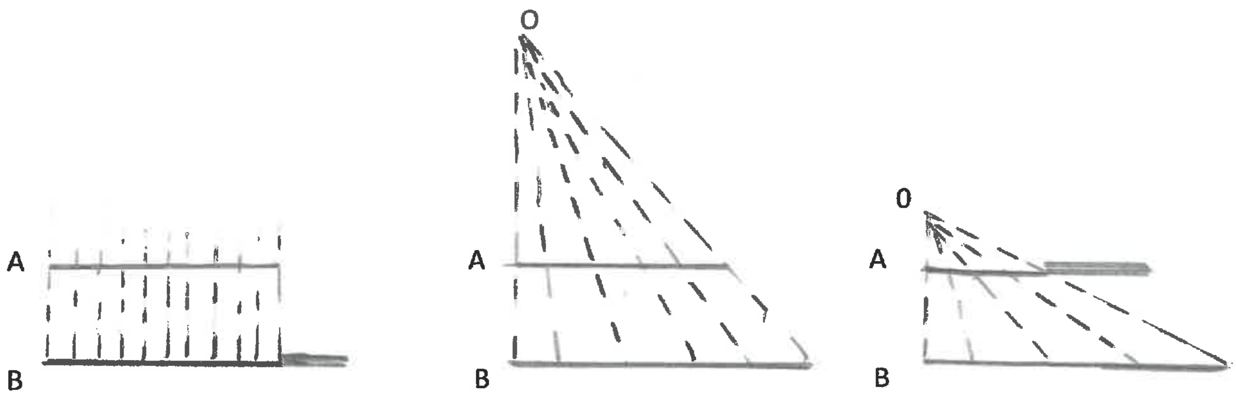


Figura 1.–

Si analizamos la figura 1 donde aparecen dos segmentos a A y B siendo A de menor longitud que B, nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿En cuál de los dos segmentos hay más puntos? En principio la respuesta será probablemente que en B hay más puntos que en A, pues si a cada punto de A le hacemos corresponder el punto de B que está en su misma vertical, como se representa en la parte izquierda de la figura, hay una parte del segmento B, cuyos puntos no se corresponden con ninguno del A, es decir que estos puntos del segmento B que están en la parte regruesada, son puntos de más que tiene el segmento B sobre el A.

Pero si establecemos la correspondencia entre puntos de los segmentos por medio de rectas inclinadas que parten del punto O, como aparece en la parte central de la figura, cada punto de A tiene su correspondiente en B y no sobra ninguno. Los dos segmentos tienen el mismo número de puntos.

Si ahora establecemos la correspondencia entre puntos de los dos segmentos por medio de rectas inclinadas que parten de O, como aparece en la parte derecha de la figura, los puntos del segmento A de la parte regruesada no tienen correspondientes en el segmento B, y por lo tanto el segmento A, según esto, tiene más puntos que el B.

Una explicación graciosa de esta aparente contradicción sería aplicar el famoso teorema del "punto gordo", que decía que por un punto exterior a una recta pueden pasar tantas rectas paralelas a ella como queramos, dependiendo del grosor del punto. En este caso aplicando este teorema diríamos que los dos segmentos tienen el mismo número de puntos, pero que los puntos del segmento B son un poco más gordos que los del A. Hay que tener cuidado con lo que se dice.

Como hemos dicho al principio, cuando nos salimos de los números finitos nos pueden ocurrir cosas que no parecen, (porque no lo son en los números finitos) normales.

Es decir que "la cantidad" de puntos que hay en los dos segmentos pueden ser iguales, mayores y menores, esto quiere decir que en un segmento no hay un número determinado de puntos. Decimos simplemente que hay un número infinito de puntos.

El significado de este infinito número de puntos es, que cualquier número "natural" que tomemos, siempre podemos asignar a cada uno de todos los números naturales menor que él un punto determinado del segmento.

Pongamos otro ejemplo, si dejamos caer una pelota al suelo, esta botará, realizando al comienzo un primer bote, continuando con este proceso, después del primer bote, la pelota asciende a una altura menor que la inicial, vuelve a caer y botar y así sucesivamente. Si nos preguntamos cuantos botes hace la pelota antes de pararse, algunos pueden responder que infinitos, sabiendo que esto quiere decir que cualquier número natural que elijamos, siempre hay un bote cuyo número ordinal se corresponde con el número elegido.

Parece que puede haber un contrasentido, ¿como es posible que, si después de cada bote hay otro, es decir no hay un último bote, la pelota se pare?

Podemos decir que, aunque haya infinitos botes, como la duración de estos botes se va haciendo cada vez más infinitamente pequeña, la suma de estos infinitos tiempos infinitamente pequeños es un tiempo finito y la pelota se para. Correctamente se debería decir que el límite de la sucesión suma de los tiempos de cada bote, cuando este número de botes tiende a infinito es una cantidad finita como veremos a continuación.

Si suponemos que los botes van reduciéndose en altura a la mitad del anterior, si la altura inicial es de 1 m., después de botar subirá a 0,5 m. El siguiente bote subirá hasta 0,25m. y así sucesivamente.

Con este ejemplo podemos hacer varias cosas, una es calcular cual es el recorrido total de la pelota en los sucesivos rebotes hasta pararse, y otra es calcular el tiempo que tarda en pararse.

Para ello vamos a calcular cual es el recorrido después de realizar "n" botes, R_n. El primer recorrido R1 antes del primer bote es de 1m, el segundo R2, 0,5 m. ascendiendo y 0,5 m, descendiendo de nuevo R2=2·0,5, el tercer recorrido R3=2·0,25 y así sucesivamente.

El recorrido suma de los n primeros botes lo podemos poner de esta forma $R=1+2\cdot 1/2+2\cdot 1/2^2+....+2\cdot 1/2^n=1+2(1/2+1/2^2+....+1/2^n)$, el paréntesis es una sucesión geométrica de razón 1/2, y su suma S es el último término por la razón, menos el primero, partido todo ello por la razón menos 1, S=(último·razón-primero)/(razón-1). Es decir $S=((1/2^n\cdot 1/2)-1/2))/((1/2)-1)$.

Cuando n tiende a infinito obtenemos $S=(0-1/2)/(-1/2)=1$, luego $R=1+2\cdot S=1+2\cdot 1=3$ m. que es el recorrido total de la pelota antes de pararse.

También podemos calcular el tiempo que tarda la pelota en pararse. Tanto bajando como subiendo su movimiento es uniformemente acelerado o decelerado con aceleración la de la gravedad 9,8 m/s^2.

La fórmula que nos relaciona la longitud recorrida con el tiempo invertido es $L=g\cdot t^2/2$. Despejando el tiempo t=raíz cuadrada de $2\cdot L/g$ que lo representaremos como $t=r(2\cdot L/g)$ (1)

Las longitudes recorridas en los sucesivos botes son: el inicial 1m. descendiendo, en el primer bote 1/2 m. ascendiendo y 1/2 m. descendiendo, en el segundo $1/2^2$ ascendiendo y $1/2^2$ descendiendo, en el bote enésimo recorre $1/2^n$ ascendiendo y $1/2^n$ descendiendo.

El tiempo total de la caída inicial más los de cada bote subiendo y bajando lo obtenemos de la siguiente forma aplicando en todos los casos la fórmula (1). Tiempo de la caída inicial $t_i=r(2\cdot 1/9{,}8)=0{,}45$ s. En el bote enésimo el tiempo empleado entre el ascenso y descenso es $2\cdot r(2\cdot L_n/9{,}8)$ El tiempo total de la caída inicial más la suma de los n primeros botes será $T_t=0{,}45+2\cdot r(2\cdot L_1/9{,}8)+.........+2\cdot r(2\cdot L_n/9{,}8)$. Sabemos que $L_n=1/2^n$.

Si aplicamos la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica y tomamos límite cuando n tiende a infinito obtenemos $T_t=0{,}45+(-0{,}64/-0{,}3)=2{,}58$ seg.

No hay un último bote, pero la pelota deja de botar a los 2,58 segundos de soltarla.

Otro ejemplo en donde sale este concepto de infinito es en los números periódicos.

Cuando vemos un número por ejemplo como este 2,333......, decimos que es un número periódico, pero ¿qué es lo quiere decir esto exactamente?

Para ello vamos a ver un poco como se ha ido ampliando el concepto de número históricamente sin entrar en muchos detalles. En un principio no se conocían los números, por ejemplo, se decía una "yunta" de bueyes, una "pareja" de hermanos gemelos, el "par" de manos de una persona. Posteriormente se dieron cuenta de que, entre la yunta, la pareja y el par de había algo en común y lo llamaron "dos", dos bueyes, dos hermanos y dos manos. Este concepto se fue ampliando y aparecieron los números naturales, 1,2,3,4,..... etc. Después vinieron los números enteros, 1,-3, 6.-10 etc. Posteriormente aparecieron los números racionales, que como su nombre indica son la razón de dos enteros ordenados, por ejemplo (5,3), que se puede en forma de razón (5/3). Si tratamos de representar un número racional de forma decimal lo que hay que hacer es realizar su división hasta que el resto de 0. Por ejemplo (6/3)=2, si lo hacemos con (3/2), la forma decimal es 1,5. Si esta división la realizamos con (5/3), resulta que nunca nos da 0 de resto, y lo representamos de forma decimal como 5/3=1,666..... diciendo que es un número periódico en el que el 6 se repite indefinidamente.

En realidad, aquí también se oculta una serie en la que el número de sumandos tiende hacia infinito.

Pongamos este número de esta forma $1{,}66... =1+6/10+6/10^2+.....+6/10^n$ cuando n tiende hacia infinito. Como otras veces esta es la suma de una progresión geométrica, luego $1{,}66...=1+(6\cdot 10^n\cdot 1/10-$

6/10)/(1/10-1) y cuando n tiende a infinito este valor tiende a 1+((-6/10/(1/10-1))=1+(-0,6/-0,9)=1+6/9=15/9, que simplificando por 3 nos da 5/3 como era de esperar.

Entre dos números racionales hay un número infinito de ellos, pues dados dos cualesquiera, por ejemplo A y B, siempre podemos obtener otro número racional de la forma C=(A+B)/2. Es decir que con los números racionales no ocurre lo mismo que con los enteros, que tienen uno anterior y otro posterior. Podemos caer en el engaño de pensar que por ejemplo el número racional siguiente a 0,999.... periodo, es el 1, pues entre estos dos números no puede existir ninguno. Como sabemos 0,999.... es el límite de la suma de una serie geométrica cuando el número de sumandos tiende a infinito. La suma de los n primeros términos de las serie es $S_n=9/10+9/10^2+.....+9/10^n=(9/10^n\cdot 1/10)-(9/10)/(1/10-1)$ y cuando n tiende a infinito esta suma tiende a S=(-9/10)/(1/10-1)=-0,9/-0,9=1, es decir que 0,999.....es 1, luego no hay ningún otro racional entre estos dos números, pues son uno mismo.

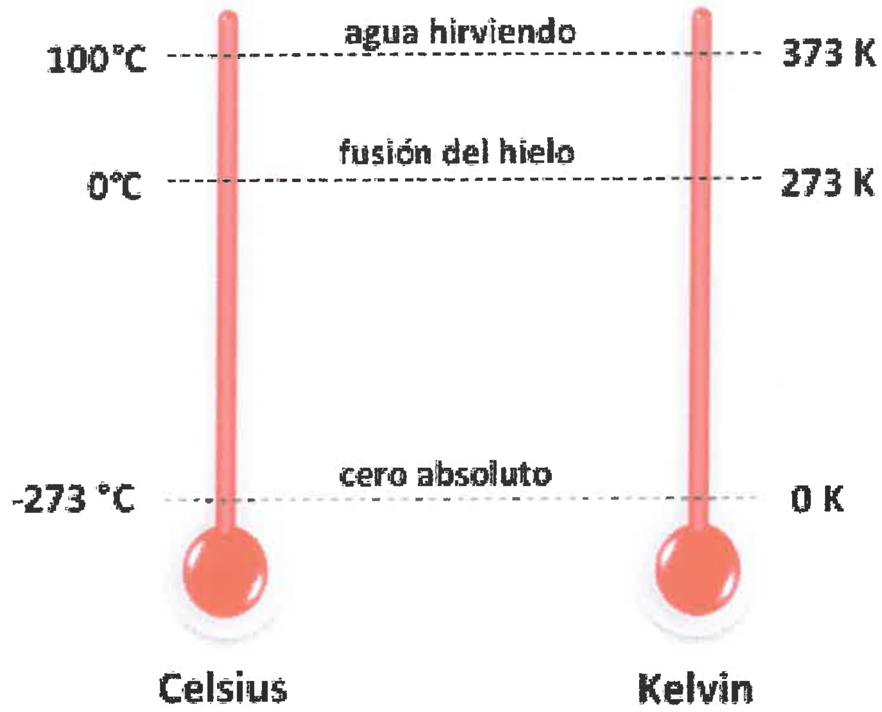
Vamos a analizar otro tema, las escalas de temperaturas. La idea general es que la temperatura tiene un tope inferior, el llamado cero absoluto, pero teóricamente no tiene un tope superior, es decir, puede crecer hasta el infinito.

Veremos que esto de los topes en la temperatura es relativo y depende del tipo de escala que utilicemos.

Las escalas de temperaturas más empleadas son, la Celsius, Kelvin y la Fahrenheit. En la escala Celsius que utiliza los grados centígrados, se toma como 0º la temperatura de fusión del hielo 100º la temperatura de evaporación. Como los cuerpos se dilatan con el calor, la forma de diseñar esta escala es fabricar un tubo capilar y llenarlo de mercurio, de forma que, al variar la temperatura, la longitud del capilar ocupada por el mercurio varia. Esta longitud aumenta con la temperatura por dilatación.

Se marcan en ese capilar los puntos a los que su extremo llega en ambas temperaturas y este tramo de aumento de longitud de la línea de mercurio se divide en 100 tramos iguales. Se define como grado cada uno de estos tramos de igual longitud.

En la figura se muestran dos de las escalas más utilizadas en nuestra latitud.



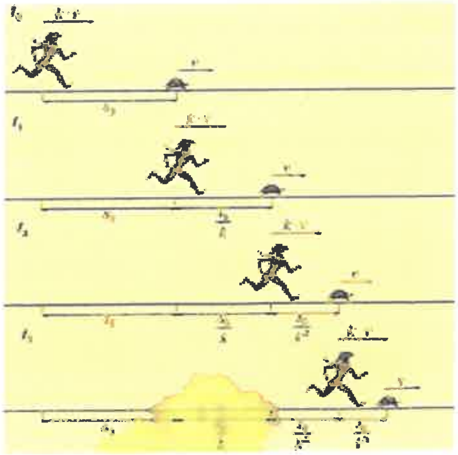
Hay que tener cuidado con la utilización de los números que dan estas longitudes. Por ejemplo, a 20ºC no hace el doble de calor que a 10º. Tampoco a 2 bajo cero hace el doble de frio que a 1 bajo cero. El salto de 1 grado en una zona del termómetro no es equivalente termodinámicamente a el mismo salto en otra zona.

Como hemos dicho, parece que la temperatura tuene un tope inferior (0ºK=-273ºC), pero que no tiene un tope superior, dicho de otra forma, teóricamente la temperatura máxima alcanzable es infinita. En la Luna hay zonas con temperaturas de -230ºC, en el Sol se han medido temperaturas de 5.778ºK y en algún acelerador de partículas se han alcanzado lo 10^{18}ºC, un diez con dieciocho ceros.

Para cambiarnos la idea que tenemos de que hay un tope inferior de temperatura y no lo hay superior, vamos a inventar una nueva escala de temperatura, la denominaremos como escala nueva y a los grados de la escala grados nuevos ºN. Para ello la fórmula que utilizaremos para esta escala será ºN=-1/ºK.

De esta forma la fusión del hielo tiene lugar a ºN=-1/Kº=-1/273=-0,0037ºN. El agua hierve a -1/373=-0,0027ºN. La temperatura del Sol es -1/5778=-0,00017ºN. La temperatura en algunos puntos de la Luna -1/40=-0,025ºN y la temperatura máxima conseguida $-1/10^{18}=-10^{-18}$ºN, casi 0ºN. En esta escala el tope inferior es de menos infinito ºN y el superior 0ºN.

Para finalizar vamos a mencionar la famosa paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga.



Esta paradoja dice que, aunque Aquiles es más rápido que la tortuga, nunca consigue alcanzarla, pues cuando Aquiles llega donde estaba la tortuga en al punto 1, ésta ya ha avanzado algo hasta el punto 2, y por lo tanto no le alcanza en ese punto. Cuando Aquiles llega al punto 2 la tortuga ha avanzado hasta el punto 3 y así sucesivamente, por lo que Zenón deduce que nunca le alcanza. El razonamiento como sabemos es falso, pues lo único que demuestra es que Aquiles no alcanza a la tortuga antes de alcanzarla. El razonamiento de Zenón consiste en decir que como los tramos cada vez más pequeños son infinitos, el tiempo que tarda en darle alcanza es infinito.

En ejemplo de la pelota que bota un número veces que tiende a infinito, ya hemos visto que el tiempo es el límite de la suma de una sucesión geométrica cuando el número de sumandos tiende a infinito, y este límite es finito. Eso mismo le ocurre a Aquiles.

Antón del Campo

Ingeniero Industrial.