EL INGENIO DE LOS INGENIEROS, LA CATAPULTA.

A principios de enero de este año, pude ver en la televisión un interesante programa sobre los castillos y su historia. Entre otros temas se mencionaba que era muy importante planificar su defensa, sobre todo debido a la existencia de las máquinas de guerra llamadas catapultas.

Según parece las primeras catapultas se utilizaron ya antes de los primeros siglos de la edad antigua, por parte de los chinos y también de los griegos.

Estos ingenios militares fueron creados por ingenieros de aquellas épocas.

Las catapultas en sus múltiples variantes fueron utilizadas durante cientos de años, hasta el descubrimiento de la pólvora.

Este ingenio fue modificándose y mejorándose a lo largo de la historia.

Los ingenieros que las construían y mejoraban sus características, no conocían las ecuaciones de la física que conocemos los ingenieros de hoy en día, pero tenían un gran ingenio e imaginación.

Uno de aquellos ilustres ingenieros fue nada menos que Leonardo da Vinci.

Ha habido gran cantidad de tipos de catapultas, nosotros estudiaremos uno de los más empleados, la llamada catapulta de contrapeso. Ver figura 1.

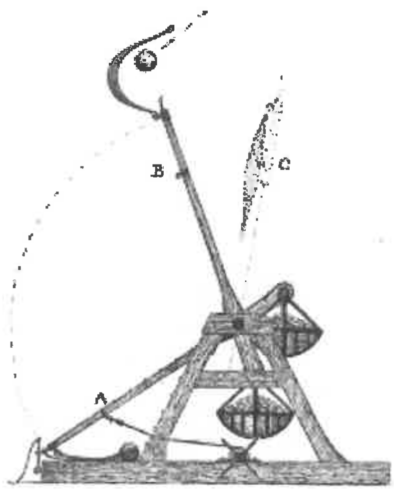

Figura 1.

Como se ve en la figura, esta catapulta consiste en una especie de palanca, en un extremo está el proyectil y en el otro el contrapeso colgado, una cesta llena de piedras en la figura.

Los constructores de catapultas sabían que, si en el tiro salía con pequeña inclinación de la velocidad inicial, el recorrido del proyectil era muy corto, lo mismo ocurría si el tiro era muy vertical, ascendía a bastante altura, pero su recorrido también era corto. Comprobaron que el máximo recorrido tenía lugar cuando la inclinación de la palanca en el momento en el que el proyectil abandonaba la catapulta era de unos 45º, y por lo tanto al ser la velocidad perpendicular al radio, esta formaba un ángulo de 45º con la horizontal.

Actualmente podemos deducir con las ecuaciones de la física cuál es el ángulo con el que produce el máximo alcance, ver figura 2.

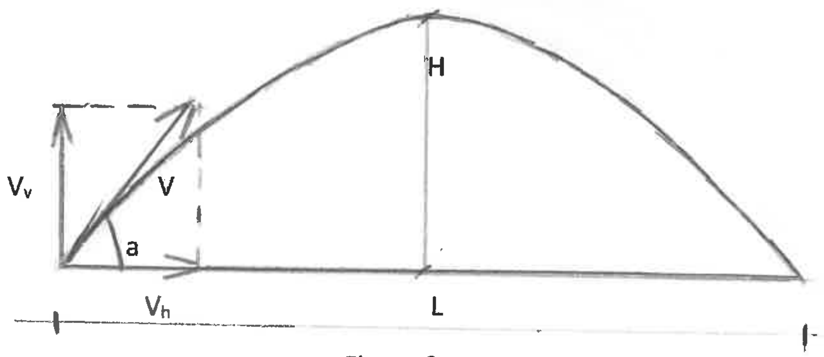

Figura 2.

La velocidad inicial V forma con la horizontal un ángulo a. Sus componentes horizontal y vertical son respectivamente V_h=V·cosa y V_v=V·sena. En vertical, durante el ascenso el movimiento es decelerado con aceleración negativa a=-9,82 m/seg2. y en el descenso es uniformemente acelerado con aceleración positiva g=9,82 m/seg2.

Llamando t al tiempo que invierte el proyectil en el recorrido ascendente, (o descendente) podemos poner $H=1/2\cdot g\cdot t^2$ y V·sena=g·t, luego sustituyedo, H=t·V·sena/2. El tiempo que tarda el proyectil en recorrer la distancia total L es 2·t (ascenso mas descenso). De V·sena=g·t obtenemos t=V·sena/g y L=2·V·cosa·t y de aquí $L=2\cdot V\cdot cosa\cdot a\cdot V\cdot sena/g=V^2\cdot sen2a/g$. (seno del ángulo doble).

El alcance L es máximo cuando sen2a es máximo, sen2a=1, 2a=90º, luego a=45º y $L_{max}=V^2/g$.

Lo que intuían los fabricantes de catapultas (intuición reforzada por la experiencia), se demuestra fácilmente aplicando sencillas ecuaciones de la mecánica, desconocidas para los antiguos ingenieros.

Para construir una buena catapulta es pues necesario construirla de modo que en el momento en el que el proyectil abandone la viga, la velocidad de este tenga una inclinación de 45º con la horizontal.

Para ello hay que fabricarla de modo que cuando la viga forme un ángulo de 45º con la horizontal, el contrapeso choque contra el suelo, se pare, y el proyectil abandone le viga.

Una catapulta sencilla consta de un armazón de dos caballetes con cuatro patas en total, con un eje horizontal en la parte superior de los caballetes; sobre este eje una viga de madera puede girar libremente. En el extremo largo de la viga se coloca el proyectil y en el otro se instala un contrapeso. Inicialmente estudiaremos el caso en que la viga está en posición horizontal en el comienzo del disparo.

El contrapeso puede ser por ejemplo como hemos dicho, una red o cesta llena de piedras colgada de la punta de la viga, antes del lanzamiento esta viga permanece apoyada para que se mantenga en horizontal. Una vez colocado el proyectil, este apoyo se retira y en ese momento es cuando comienza el disparo.

En referencia a las catapultas, en Wikipedia se dice que como término medio la longitud de la viga variaba entre 8 y 12 m, que el peso del contrapeso estaba comprendido entre 10 y 18 tm., que el proyectil solía pesar entre 80 y 100 kg, y que su alcance podía llegar a 200 m.

Vamos a tratar de proyectar una catapulta que lo consiga, apoyándonos en los conocimientos que tenemos actualmente de la Física. Tenemos esta ventaja sobre los antiguos ingenieros, no es necesario que construyamos las diversas catapultas y vayamos comprobando con qué tipo obtenemos los mejores resultados.

Vamos a calcular el alcance de este tipo de catapulta estudiando varios casos con diversas modificaciones. Lo haremos con una catapulta muy esquemática para facilitar los cálculos, incluso en principio despreciaremos el peso de la viga, y aunque los resultados no sean más que aproximados, nos valdrán para deducir cual puede ser la geometría y valores de pesos ideales y finalmente estudiaremos una catapulta casi real.

Primer caso.

En principio vamos a construir una catapulta con una viga de 1+10m, con un contrapeso de 15.000. En la figura 3 se representa esquemáticamente la catapulta en el momento inicial y en la 4 en el momento final del lanzamiento.

C es el contrapeso y P el proyectil.

Las alturas en el momento del lanzamiento del contrapeo y del proyectil son respectivamente, -1·sen45=-0,71 m. y 10·sen45=7,1

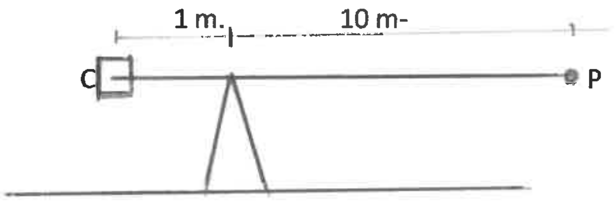

Figura 3.

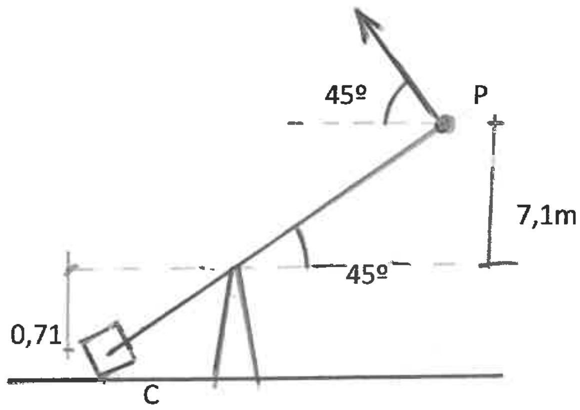

Figura 4.

Vamos a aplicar el teorema de conservación de la energía mecánica, la cinética más la potencial gravitatoria.

Si en el momento inicial la viga está en posición horizontal y tomamos como referencia la altura de esta viga, la energía potencial inicial tanto la del contrapeso como la del proyectil son nulas, asimismo la energía cinética inicial es nula, pues partimos del reposo.

Es decir, $E_c+E_p=0$

En el momento en que el proyectil sale disparado, la energía cinética total es la suma de las energías *cinéticas del contrapeso, más la del proyectil. Así mismo la energía potencial en ese momento es la* suma de las energías potenciales de los dos elementos.

El valor de la energía cinética de rotación de un cuerpo es $E=I\cdot W^2/2$, siendo I su momento de inercia y W su velocidad angular. Las velocidades angulares del contrapeso y proyectil son iguales.

El valor del momento de inercia es $I=m\cdot d^2$ siendo m la masa y d la distancia al eje de giro.

Los momentos de inercia en este caso son los siguientes:

Contrapeso $I_1=15.000\cdot 1^2=15.000$

Proyectil $I_2=90\cdot 10^2=9.000$

La energía cinética total en el momento final del disparo es $(I_1+I_2)\cdot W^2/2=(15.000+9.000)\cdot W^2/2$ $=12.000\cdot W^2$(1), por ser W igual para contrapeso y proyectil.

La energía potencial como sabemos vale $E_p=m\cdot g\cdot h$

La energía potencial en este momento final del disparo es:

Energía potencial del proyectil $90\cdot 9{,}82\cdot 7{,}1=6.275$

Energía potencial del contrapeso $-15.000\cdot 9{,}82\cdot 0{,}71=-104.583$

La suma de esas dos energías potenciales es -98.308(2).

La energía total en este momento final es (1)+(2)=$12.000\cdot W^2-104.583$.

Igualando esta cantidad a la energía en el momento inicial que es nula, $12.000\cdot W^2-104.583=0$ obtenemos W=2,95 rad/s. La velocidad tangencial del proyectil será la angular por el radio de giro, $2{,}95\cdot 10=29{,}5$ m/s. El recorrido del proyectil según hemos deducido al principio será $L=29{,}5^2/9{,}82=88{,}75$ m.

Es una distancia bastante corta, tendremos que ingeniar algo para aumentarla. En principio se me ocurre alargar el brazo corto de la catapulta a 2 metros, de donde cuelga el contrapeso, de esta manera parece que al ser mayor el brazo de palanca, aumentaremos su efectividad.

2º caso, aumentando solamente de la longitud del tramo corto de la viga a 2 m.

Operando de la misma forma que en el primer caso con los nuevos datos de partida, obtenemos el recorrido que es de 59,89. No es esta la solución para aumentar el recorrido.

Tercer caso.

Vamos a aumentar solo la masa del contrapeso a 20.000 k.

Operando con los datos de este tercer caso obtenemos el correspondiente recorrido del proyectil L=93,52 m. Algo hemos avanzado.

Cuarto caso.

Alargando solamente el tramo largo de viga a 15 m.

Operando como otras veces obtenemos L=123,72 m. Esta modificación sí que es efectiva, pero aumentamos bastante el peso de la viga y si no despreciamos el peso de la viga no será tan efectiva.

5º caso. Reduciendo a 50 kg. el peso del proyectil.

Operando de la misma forma obtenemos L=102,95 m. Aumentamos algo la distancia, pero a costa de lanzar proyectiles de menor peso.

6º caso. Vamos a estudiar un sexto caso soltando el contrapeso desde un punto más alto, formando por ejemplo la viga un ángulo de 30ª con la horizontal. Figura 5

De esta forma parece que la energía potencial inicial es mayor y el recorrido del proyectil será mayor a su vez. Ver figura 5.

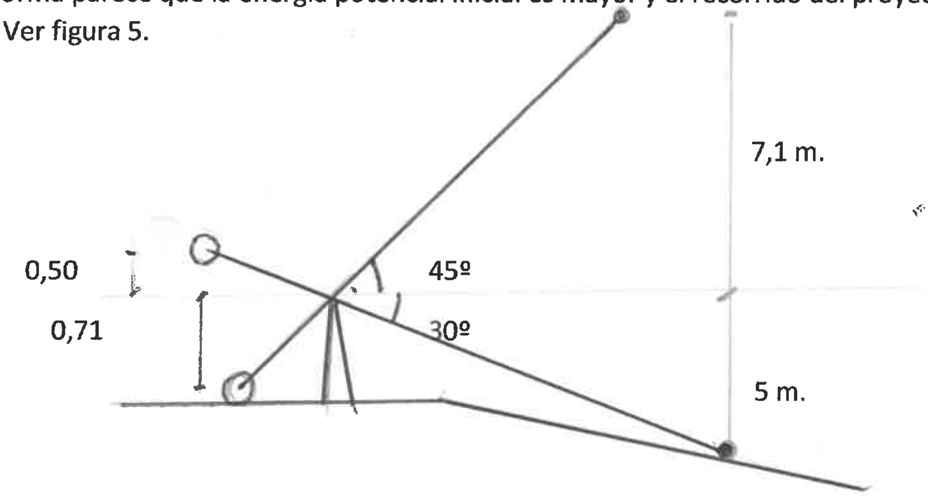

Figura 5.

En este caso la energía inicial no es cero, pues hay energía potencial positiva del contrapeso y negativa del proyectil en el momento inicial.

La distancia obtenida en este caso es L=126,89 m. Esta modificación también es bastante positiva.

Estos resultados que hemos obtenido no son reales como hemos dicho, pues hemos despreciado el peso de la viga, que como veremos tiene su importancia, asimismo hemos dejado de lado la resistencia del aire, que aun siendo menor su influencia haría disminuir los resultados en todos los casos, pero nos ha servido para ver qué es lo más importante y sobre lo que tenemos que actuar para mejorar sensiblemente la eficacia de la catapulta.

Comparemos lo resultados obtenidos con los diversos modelos de catapulta.

Por orden de importancia hemos obtenido que lo más conveniente es elevar la altura inicial de contrapeso, en segundo lugar, alargar el brazo largo de la viga, en tercer lugar, disminuir el peso del proyectil y en cuarto lugar aumentar el peso del contrapeso.

Nos ha costado bastante llegar a estas conclusiones, pero menos de los que les costó a los ingenieros medievales, gracias a nuestros conocimientos actuales de mecánica.

Llegando hasta aquí tenemos que recordar otro ingenio militar, que fue la honda. Al alargar la longitud del radio de giro de la trayectoria del proyectil antes de soltarlo, que sin la honda es la longitud de nuestro brazo, y con la honda aumenta, aumentamos la velocidad, pues sabemos que la velocidad lineal es la angular por el radio de giro V=W·R. Si con la honda doblamos el radio de giro, doblamos la velocidad lineal y como sabemos que $L=V^2/g$, multiplicamos por $2^2=4$ el alcance.

Fueron muy famosos los honderos baleares que como mercenarios llegaron a formar un cuerpo de ejército de élite en las legiones romanas. El alcance de sus hondas era superior al de las flechas del enemigo y este no podía acercarse sin sufrir las primeras bajas.

Aparte de la honda hay otros ejemplos en los que se aumenta el radio de giro, aumentando de esta forma la velocidad. En pelota a mano por ejemplo, la velocidad máxima de la pelota sobrepasa por muy poco los 100 km/h. pero alargando el radio de giro en cesta punta con cesta de 50 cm. de longitud, que sin la cesta es de unos 60 cm, (longitud del brazo extendido), pasa a ser de unos

60+50=110cm. La velocidad se multiplica por $(110/60)^2=3{,}36$ es decir 3,36·100 km/h obtenemos 336 km/h.

El récor de velocidad en esta modalidad está en los 313 km/h. acorde con la teórica obtenida.

Como alargar el tramo largo de la viga de la catapulta conlleva un aumento de peso de esta viga, en vez de alargar en 5 m. este tramo lo podemos ejecutar mediante una honda en su final. Esto es lo que ingeniaron los ingenieros medievales construyendo lo que se llamó el fundíbulo, Figuras 6 y 7.

El fundíbulo de la figura 6 parte de la viga con el contrapeso en el momento inicial elevado de la horizontal y el proyectil en ese instante está sobre una especie de carril horizontal a nivel del suelo por donde discurre durante el comienzo del disparo, hasta que al ir elevándose la parte larga de la viga llega un momento en el que el proyectil abandona el carril y se eleva para ir girando hasta finalizar el disparo cuando la velocidad llega a formar 45º con la horizontal, que como sabemos es como se logra el recorrido máximo.

En la figura 7 está representado otro tipo de fundíbulo en la que se aprecian las cuerdas que hacen que cuando el extremo de la honda y el proyectil lleguen al punto necesario para que la velocidad forme los 45º con la horizontal, esta honda no siga avanzando y el proyectil salga lanzado. En este fundíbulo se ve que el contrapeso inicialmente está también por encima del eje de giro.

Se puede ver el gran tamaño del contrapeso, que está formado por una especie de caja de madera, con elementos pesados en su interior.

Figura 6

Figura 7.

Para finalizar, utilizando lo que hemos deducido, vamos a proyectar un fundíbulo con un contrapeso de 20.000 kg. formando 45º con la horizontal, un proyectil de 90 kg. una viga de 1+10 m. y en su extremo una honda de 5 m.

Tiene un canal horizontal por donde discurre el proyectil al inicio del disparo y unas cuerdas que sujetan la honda impidiendo que se pase del punto en que la dirección de la velocidad es de 45º. Trabajaremos con una viga de sección cuadrada de 20x20 cm. y un peso específico de 500 kg/m3.

En la figura 8 se ve el momento inicial del disparo.

En la figura 9 se ve el momento en que el proyectil abandona el carril horizontal y comienza su ascenso.

En la figura 10 se ve el momento en que el proyectil abandona la honda, al impedírsele a esta su avance por medio de una cuerda atada al suelo, por ejemplo.

No hemos representado la viga como una línea, para recordar que tenemos en cuenta el peso y el momento de inercia de la misma.

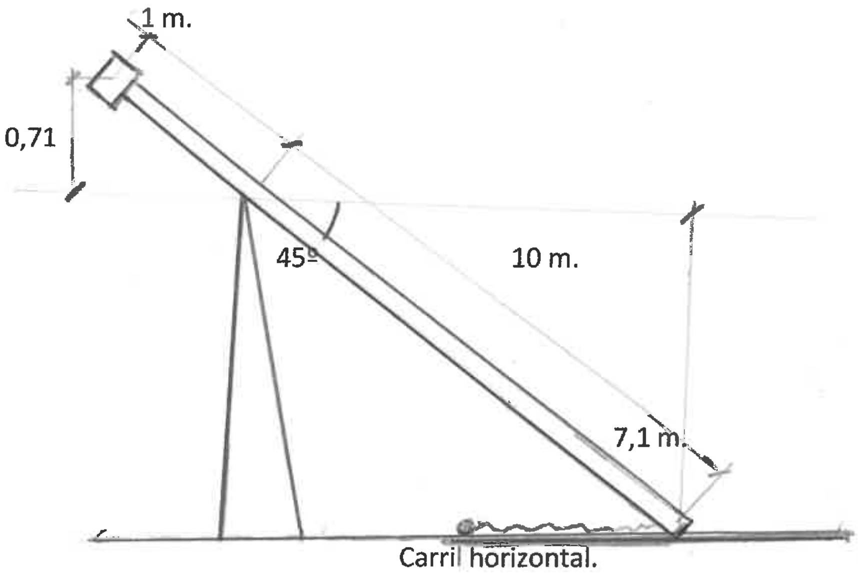

Figura 8.

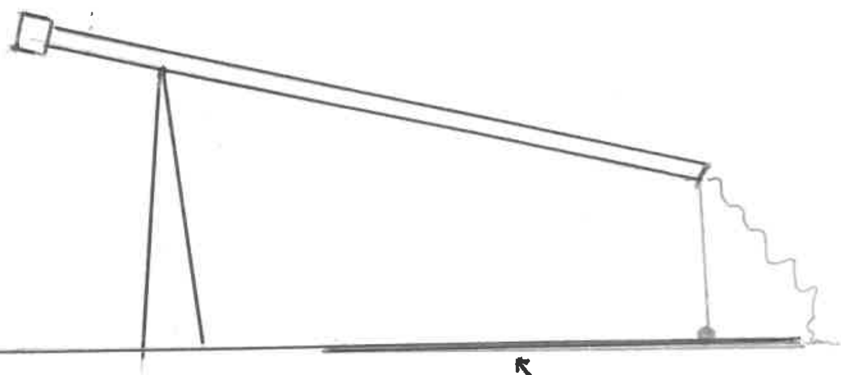

Figura 9.

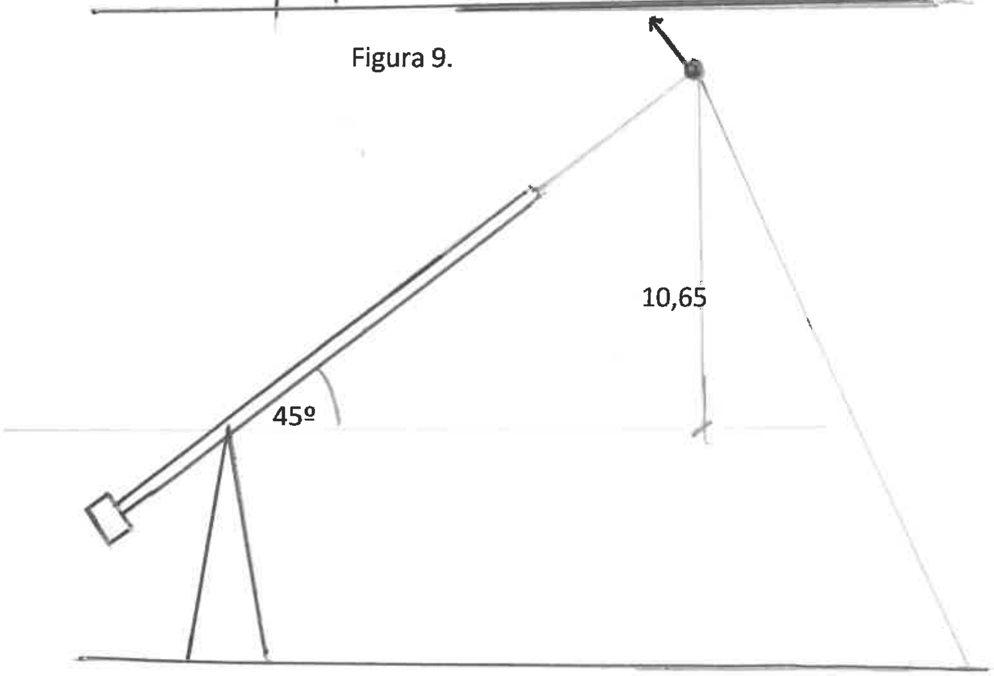

Figura 10.

En este caso además del peso e inercia del contrapeso y del proyectil incluimos el peso y el momento de inercia de la viga. Igualando la energía al inicio y al final, y operando de la misma forma que en los demás ejemplos obtenemos. L=180 m.

Hemos conseguido proyectar un fundíbulo con las características del mencionado en Wikipedia.

Al final del artículo he añadido los cálculos correspondientes a este último caso para quien quiera comprobarlo.

CÁLCULOS.

En el momento inicial la energía existente es la potencial, del contrapeso menos la del proyectil mas la del tramo corto de la viga, menos la del tramo largo. Figura 8.

Los pesos de los diversos elementos son: contrapeso 20.000 kg, proyectil 90 kg. tramo corto de la viga 0,2·0,2·1·500=20 kg., tramo largo 0,2·0,2·10·500=200 kg.

La energía potencial inicial =m·g·h de estos cuatro elementos es: (20.000·0,71+20·0,35-90·7,1-200·3,55)·g

E_{pi}=(14.200+7-639-710)·9,82=126.265,56 (3)

La energía potencial al final del disparo es, ver figura 10,

E_{pf}=(-20.000·0,71-20·0,35+200·3,55+90·10,65)·9,82=-38.415,84 (4)

Como sabemos la energía cinética vale $E_c=I\cdot W^2/2$.

Los momentos de inercia de los cuatro elementos son, Contrapeso I=20.000·1^2=20.000, proyectil 90·15^2=20.250, tramo corto de viga I=20·1^2/12=1,67, tramo largo I=200·10^2/12=1.667.

La energía cinética final es E_{cf}=(20.000+20.500+1,67+1.667)·W^2/2=20.959·W^2 (5)

Igualando las energías inicial y final (3)=(4)+(5) 126.265,56=-38.415,84+20.959·W^2

De aquí W=2.80 rad/s. y V=W·R=2,80·15=42,05 m/s. Luego L=42,05^2/9,82=180 m.

Anton del Campo.

Ingeniero Industrial.