ATADOS DE LOS CABALLOS Y CONCHAS MARINAS.

¿Puede haber alguna relación entre el atado de las cintas de los caballos en las películas del Oeste, con la forma de las conchas de los caracoles de mar?

Veámoslo, posteriormente al escrito sobre nudos y uniones publicado en octubre, hemos celebrado en Bilbao la comida anual de la promoción 113 de la escuela de ingenieros.

En nuestra mesa estábamos seis, tres que viven en Bilbao y tres en Donosti; Manolo García, Jesús Tanco y yo. En la sobremesa salió el tema de las películas del oeste y uno de los de Bilbao nos comentó que le extrañaba que los vaqueros al bajar del caballo no anudasen las riendas al madero vertical colocado para tal fin, y que solamente dieran un poco más de una vuelta a la cinta, por lo que el pensaba que al caballo le sería muy fácil desembarazarse de la correa y escapar

Le comentamos que casualmente este tema estaba tratado en el último escrito que me había publicado el Colegio de Donosti. Como mostró tanto interés, le expliqué de manera resumida lo que decía el artículo sobre el rozamiento de las cintas.

Al ver que hay alguien más que se ha fijado en este asunto, me he decidido a profundizar un poco más en el tema de las cuerdas, cintas y rozamiento. Para ello he realizado varios sencillos experimentos.

He utilizado un cordón de zapato y en un extremo he atado una pequeña pila. He colocado el cordón sobre un lapicero cilíndrico sin darle ninguna vuelta y en el otro extremo del cordón he atado una pequeña bolsa. He ido cargando poco a poco la bolsa con pilas y diversos objetos hasta lograr que el cordón deslizase. A continuación, he pesado la bolsa con el peso que tenía en el momento de comenzar el deslizamiento.

He repetido la prueba manteniendo en un extremo la pila dando al cordón vuelta y media alrededor del lápiz.
He vuelto a hacer lo mismo dando al cordón dos vueltas y media.

Figura 1.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Una pila de 11 gr. en el extremo izquierdo, media circunferencia (pi radianes) de contacto entre cordón y lápiz, peso de la bolsa al comienzo del deslizamiento, (cuando el rozamiento entre cordón y lápiz es máximo) 23 gr.

Una pila en un extremo, circunferencia y media (3·pi radianes) de contacto, peso de la bolsa al comenzar el deslizamiento 75 gr.

Una pila en un extremo, dos vueltas y media (5·pi radianes) peso de la bolsa 292 gr. Ver figura 1.

Representando gráficamente estos resultados, en abscisas ángulo del enrollamiento en radianes y en ordenadas peso soportado en gramos, se comprueba que el peso soportado crece mucho más rápidamente que la longitud de contacto entre lápiz y cordón. Ver figura 2.

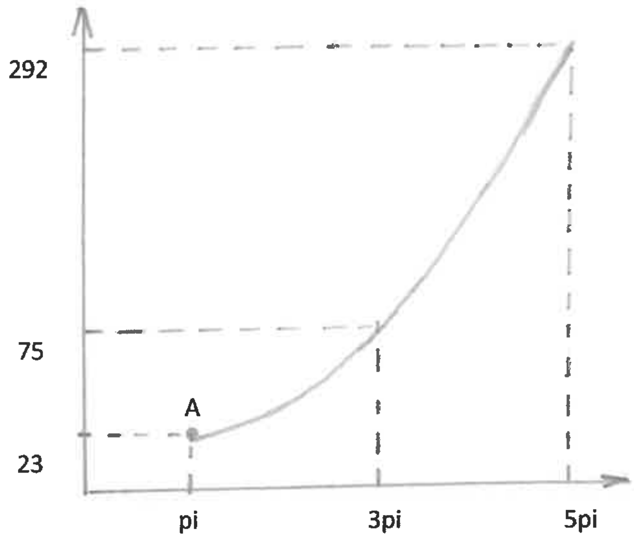

Figura 2.

Hay que tener en cuenta que esta representación gráfica nos da la tensión del cordón en todos sus puntos y no solamente los resultados aislados de los tres experimentos, pues por ejemplo el punto A no es solo el resultado del primer experimento, ya que al realizar la tercera prueba con dos vueltas y media de cordón (5·pi radianes), cuando el cordón empieza a deslizar, la primera parte del cordón (el cuelgue más media vuelta) también desliza con el resto del cordón y la tensión en A tiene que ser la misma que cuando desliza solo esta parte en el primer experimento

En la figura 3 puede verse la pila, el cordón, el lápiz y la bolsa utilizados.

He tratado de deducir la ecuación de la curva que da la variación de la tensión en función de la longitud de contacto, es decir la función que se representa en la figura 2.

Para ello empecé buscando en internet algo sobre poleas y rozamiento como ayuda inicial, pero no sé por qué, cuando pretendía entrar en escritos sobre este tema no lo conseguía. Tengo instalado en el ordenador un antivirus que, por lo visto, tiene manía a este tipo de temas.

Así que decidí tratar de encontrar esta ecuación por mi cuenta sin ayuda.

Para ello tomé un trozo diferencial de cordón y planteé las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en dos ejes perpendiculares X e Y. El eje de abscisas tangente a la circunferencia y el de ordenadas perpendicular.

No voy a describir aquí detalladamente el proceso. Simplemente diré que, una vez planteadas las dos ecuaciones diferenciales del equilibrio de fuerzas en los dos ejes, sustituyendo infinitésimos por otros equivalentes y despreciando infinitésimos de órdenes superiores, obtuve la siguiente fórmula de la tensión en función de la longitud de contacto en radianes.

$T=T_1 \cdot e^{nb}$, siendo T la tensión en el cordón en el punto de ángulo b, T_1 la tensión en el primer punto de contacto entre cordón y lápiz (en este caso 11g), e la base de los logaritmos neperianos (2,71...), n el coeficiente de rozamiento, y b el ángulo en radianes de la longitud de contacto.

Es una función exponencial que está muy de acuerdo con lo obtenido en los sencillos experimentos con el lápiz.

Llegados a este punto me di cuenta de que también podía intentar ver algún artículo sobre poleas y rozamiento con el móvil, donde no tengo instalado ningún antivirus.

Resulta que encontré un artículo en la sección Mecánica para mecatrónicos donde se estudiaba esto mismo.

Me satisfizo ver que el planteamiento y la forma general del estudio era prácticamente igual a los que yo había hecho.

La solución que aparece es $T_2=T_1 \cdot e^{nb}$, la misma que la obtenida por mí.

Según esta fórmula si $T_1=0$, es decir, si no colocamos ninguna pila, como el cordón prácticamente no pesa, la tensión T_2 es cero en todos los puntos. Esto lo he comprobado y en efecto, sin pila, el cordón no soporta ningún peso en el otro extremo, no existe rozamiento entre lápiz y cordón por muchas vueltas que se le dé al cordón.

En el caso de la cinta y el caballo no hay ningún peso adicional en el extremo que cuelga, pero el tramo de cinta que cuelga suelta tiene su peso y no es nula la tensión en el primer punto de contacto. Además, la cinta tiene cierta anchura, más superficie que el cordón del zapato y el rozamiento es mayor.

También se deduce de esta fórmula que, por ejemplo, si doblamos la tensión inicial se multiplica por dos la tensión en todos los puntos de la cinta.

He colocado dos pilas en el extremo inicial (22 gr.) y los pesos obtenidos al comenzar el deslizamiento han sido con aproximación suficiente, el doble de los obtenidos con una sola pila; de 75 gr. con vuelta y media (3·pi) se ha pasado a 174 y de 292 con dos vueltas y media (5·pi) a 575.gr.

Vamos a calcular el coeficiente de rozamiento "n", para ello tomemos uno de los ejemplos, pila de 11 gr en un extremo y arrollamiento de vuelta y media, 3·(pi), 9,42 radianes, y 75 gr al comenzar el deslizamiento. Sustituyendo estos valores en la fórmula obtenida. $75=11 \cdot 2{,}71^{9{,}42n \cdot}$ de aquí se deduce que n=0,20.

Si ahora aplicamos esta misma fórmula para calcular el peso que soportará una pila de 11 gr. con 5pi (15,7) radianes de enrollamiento $T=11 \cdot e^{0{,}20 \cdot 15{,}7}$ =254 gr. La diferencia con la obtenida en el experimento (292 gr), es del 13%.

Es una diferencia pequeña teniendo en cuenta los sencillos experimentos con los que hemos obtenido los valores.

La forma de las conchas es, también una espiral logarítmica basada en el número "e". La concha crece de dentro hacia afuera lo mismo que el molusco. De este modo la inclinación respecto a la circunferencia se mantiene constante y esta es una propiedad de la espiral logarítmica. Lo mismo ocurre con la fuerza F que ejerce el lápiz sobre el cordón, ver la figura 4.

Debido a esta similitud de la constancia del ángulo formado con el radio, es por lo que en los dos casos aparece la espiral logarítmica.

Es muy curioso que la fuerza de atado de los caballos del oeste esté regulada por el número irracional e, base de los logaritmos neperianos, cuyo valor es (para más extrañeza) $e=\lim(1+1/n)^n$ cuando n tiende a infinito.

Figura 3.

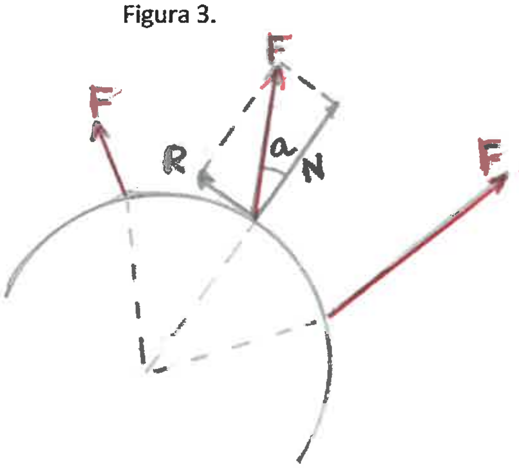

Figura 4,

La fuerza F que ejerce el lápiz sobre el cordón mantiene un ángulo fijo "a" respecto del radio debido a que el coeficiente de rozamiento "n" es constante a lo largo del cordón y n=R/N=tga, siendo R la fuerza de rozamiento
y N la normal. Esta misma espiral logarítmica aparece en la forma de las galaxias espirales, los ciclones etc.

No hay que extrañarse de que la naturaleza siga leyes matemáticas pues ya en su comienzo, las primeras matemáticas que fueron los números naturales describían elementos de la naturaleza, como tres árboles, cinco renos, seis noches etc.

Para terminar, fijémonos en la ecuación anteriormente obtenida: $T=T_1 \cdot e^{na}$, la tensión en el cordón aumenta al aumentar el ángulo "a" en radianes del arrollamiento, pero contrariamente a lo que pudiera parecer, esta tensión no depende de la longitud del arrollamiento. He comprobado este hecho haciendo dos experimentos con un rodillo de madera utilizado en pastelería. He colocado en el extremo izquierdo del cordón dos pilas, he apoyado el cordón en la parte central del rodillo, media circunferencia (ángulo de 3,14 radianes) que es la zona más gruesa y tiene un radio de 2 cm., y he ido cargando poco a poco la bolsita hasta el deslizamiento. He repetido lo mismo en la zona menos gruesa del rodillo, de 1 cm. de radio y el peso de la bolsa no ha variado. En el caso de la zona gruesa la longitud de contacto correspondiente a (pi) radianes es de 3,14·2= 6,28 cm. Y en la zona delgada esta longitud es de 3,14 cm. El rozamiento total es igual en los dos casos. Si repitiésemos el experimento con un troco de 1 m. de diámetro enrollando media circunferencia, el peso soportado por las dos pilas sería el mismo.

Rodillo con arrollamiento en la zona gruesa.

La forma de las conchas es también una espiral logarítmica basada en el número "e". La concha crece de dentro hacia afuera lo mismo que el molusco, De este modo la inclinación respecto a la circunferencia se mantiene constante y esta es una propiedad de la espiral logarítmica. Lo mismo ocurre con la fuerza F que ejerce el lápiz sobre el cordón, ver la figura 4.

Debido a esta similitud de la constancia del ángulo formado con el radio, es por lo que en los dos casos aparece la espiral logarítmica.

Es cierto que más adelante ciertas relaciones de la naturaleza non son tan sencillas como los números naturales, Por ejemplo, la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro viene dada por el número irracional (pi), 3,14...; como hemos visto la relación entre la tensión de un cordón y el ángulo de contacto del enrollamiento vienen relacionados por "e".

Antton del Campo. Ingeniero Industrial.